

熟考問題 文章をしっかり読んで、考えましょう!

- 1 Z-UP 高校の生徒会では、文化祭でTシャツを販売し、その利益をボランティア団体に寄付する企画を考えている。そこで、できるだけ利益が出るように、販売価格を下記の手順で考えることにした。

<価格決定の手順>

①アンケートの実施

200人の生徒に、「Tシャツ1枚の価格がいくらまでであればTシャツを購入してもよいと思うか」について尋ね、500円、1000円、1500円、2000円の4つから1つを選んでもらう。

②業者の決定

無地のTシャツ代とプリント代を合わせた「製作費用」が最も安い業者を選ぶ。

③Tシャツ1枚の価格決定

価格は「製作費用」と「見込まれる販売数」をもとに決めるが、販売時に釣り銭の処理で手間取らないように50の倍数の金額とする。

下の表1は、アンケート調査の結果である。生徒会では、例えば価格が1000円するときには1500円や2000円と回答した生徒も1枚購入すると考えて、それぞれの価格に対し、その価格以上の金額を回答した生徒の人数を「累積人数」として表示した。

表1

Tシャツ1枚の価格(円)	人数(人)	累積人数(人)
2000	50	50
1500	43	93
1000	61	154
500	46	200

以下は、この結果を受けて、生徒会の太郎君と花子さんが話している場面です。

太郎「売上額は、(Tシャツ1枚の価格)×(販売数)で決まるから、このアンケート結果をもとに、表1にない価格の場合にどのような販売数になるか予想をしてみよう。」

花子「そうね。まずは、表1のTシャツ1枚の価格と【ア】の値の組を (x, y) として、座標平面上に表してみよう。すると、なんだかこの4点は直線に沿って分布しているように見えるね。」

太郎「本当だ。じゃあこの直線を、Tシャツ1枚の価格 x と販売数 y の関係を表すグラフとみなして考えよう。」

花子「なるほど。じゃあこのとき、 y は x の【イ】だから、売上額を $S(x)$ っておくと、この $S(x)$ は x の【ウ】になると考えることができるね。」

太郎「これで他の価格の場合でも売上額を考えることができるじゃん。よし、じゃあさっそく考えていこう。」

※下線部において、生徒会が考えている直線とは、表1を用いて座標平面上にとった4点のうち x の値が最小の点と最大の点を通る直線である。この直線を用いて、次の問いに答えよ。

- (1) 太郎君と花子さんの会話の中で、【ア】、【イ】、【ウ】に入るものとして最も適当なものを、次の中から1つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

① 人数 ② 累積人数 ③ 製作費用 ④ 比例 ⑤ 反比例 ⑥ 1次関数 ⑦ 2次関数

- (2) 売上額 $S(x)$ が最大になる x の値を求めよ。

熟考問題 文章をしっかり読んで、考えましょう!

1 $\triangle ABC$ に対して、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさをそれぞれ A 、 B 、 C で表すものとする。

$\triangle ABC$ において $A=60^\circ$ であるとする。このとき、 X を

$$X = 4\cos^2 B + 4\sin^2 C - 4\sqrt{3}\cos B\sin C$$

と定義する。以下、この X の値について太郎君と花子さんの会話である。会話を読んで、各問いに答えよ。

<会話 1>

太郎「 B と C がわからないから、どうしたらいいかわからないね。」

花子「まずは具体例から考えてみようよ。 $B=90^\circ$ と仮定すると、 $\cos B = \text{【ア】}$ 、 $\sin C = \text{【イ】}$ だね。この場合の X の値を計算すると 【ウ】 になるね。」

(1) $\text{【ア】} \sim \text{【ウ】}$ に当てはまるものを、次の中から1つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑥ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑦ $-\frac{1}{2}$ ⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑨ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

<会話 2>

太郎「 $B=13^\circ$ を考えてみよう。三角比の表を利用して、 $\cos B=0.9744$ 、そして $\sin C$ は…、あれ? でも表には 90° までしかないからわからないなあ。」

花子「でも 【エ】 という関係を利用したら、三角比の表から $\sin C = \text{【オ】}$ だとわかるね。」

太郎「なるほど。じゃあこの場合の X の値を $\sqrt{3}=1.732$ として計算してみよう。小数第4位を四捨五入すると、 X は 【ウ】 になったよ!もしかしたら、 $A=60^\circ$ ならば $X = \text{【ウ】}$ になるんじゃない?」

(2) 【エ】 に当てはまる最も適当なものを、次の中から選べ。

- ① $\sin(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ ② $\sin(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$ ③ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
 ④ $\sin(90^\circ - \theta) = -\cos \theta$ ⑤ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ⑥ $\sin(180^\circ - \theta) = -\sin \theta$
 ⑦ $\sin(180^\circ - \theta) = \cos \theta$ ⑧ $\sin(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

(3) 【オ】 に当てはまるものを、次の選択肢の中から選べ。

- ① 0.4237 ② -0.8951 ③ 0.9563 ④ 2.1549

<会話 3>

花子「 $A=60^\circ$ ならば $X = \text{【ウ】}$ となるかどうか、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R として考えてみよう。

$A=60^\circ$ だから、 $BC = \text{【カ】} R$ になるね。」

太郎「そして、 $AB = \text{【キ】}$ 、 $AC = \text{【ク】}$ になるよ。」

(4) 【カ】 に当てはまる値を答えよ。

(5) 【キ】 、 【ク】 に当てはまるものを、次から1つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- ① $R\sin B$ ② $2R\sin B$ ③ $R\cos B$ ④ $2R\cos B$
 ⑤ $R\sin C$ ⑥ $2R\sin C$ ⑦ $R\cos C$ ⑧ $2R\cos C$

<会話 4>

花子「まず、 B が鋭角の場合を考えてみたよ。」

<花子さんの考え>

点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと、 $AH = AC \cos 60^\circ \cdots \text{(i)}$ 、 $BH = BC \cos B \cdots \text{(ii)}$ である。 AB を AH 、 BH を用いて表すと、 $AB = AH + BH$ であるから、 $AB = \text{【ケ】} \sin B + \text{【コ】} \cos B \cdots \text{(iii)}$ が得られる。

太郎「さっき $AB = \text{【キ】}$ と求めたから、この(iii)の式と合わせると、 $X = \text{【ウ】}$ が証明できたね。」

花子「やったね! B が直角のときはすでに $X = \text{【ウ】}$ を計算したから、あとは考え方を少し変えれば B が鈍角のときも証明できるね。」

(6) 【ケ】 、 【コ】 に当てはまるものを、次の中から選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- ① $\frac{1}{2}R$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ④ R ⑤ $\sqrt{2}R$ ⑥ $\sqrt{3}R$ ⑦ $2R$ ⑧ $2\sqrt{2}R$ ⑨ $2\sqrt{3}R$

(7) 花子さんの考えを利用して、 B が鈍角のときに $X = \text{【ウ】}$ となることを証明せよ。