p ： $x^2 - x - 2 \geqq 0 \iff (x+1)(x-2) \geqq 0 \iff x \leqq -1\,,\ 2 \leqq x$

q ： $|x+2| \leqq a \iff -a \leqq x+2 \leqq a \iff -a-2 \leqq x \leqq a-2$

r ： $x^2 - 5x + 6 \leqq 0 \iff (x-2)(x-3) \leqq 0 \iff 2 \leqq x \leqq 3$

条件 p， q， r を満たす x の集合をそれぞれ P， Q， R とする

(1)　$P \supset R$ であるから

$p \Rightarrow r$ は偽， $r \Rightarrow p$ は真

よって， p は r であるための必要条件 ①　… $\boxed{ア}$

$a = 4$ のとき， q ： $-6 \leqq x \leqq 2$ より

$\overline{q}$ ： $x < -6$， $2 < x$

であるから， $R \not\subset \overline{Q}$， $\overline{Q} \not\subset R$ となるので

$r \Rightarrow \overline{q}$ は偽， $\overline{q} \Rightarrow r$ は偽

よって， r は $\overline{q}$ であるための必要条件でも十分条件でもない ③　… $\boxed{イ}$

(2)　「p または $\overline{q}$」が，すべての実数になるような a の範囲は

$a > 0$　かつ　「$2 \leqq -a-2$　または　$a-2 \leqq -1$」

$\iff$　$a > 0$　かつ　「$a \leqq -4$　または　$a \leqq 1$」

$\iff$　$a > 0$　かつ　$a \leqq 1$

$\therefore\ 0 < a \leqq 1$　… $\boxed{ウ,\ エ}$

(1)　$2x^2+xy-y^2-5x+y+2$

$=2x^2+(y-5)x-(y^2-y-2)$

$=2x^2+(y-5)x-(y+1)(y-2)$

$=(x+y-\underline{2})(\underline{2}x-y-\underline{1})$　…$\boxed{ア,イ,ウ}$

(2)　(1)より

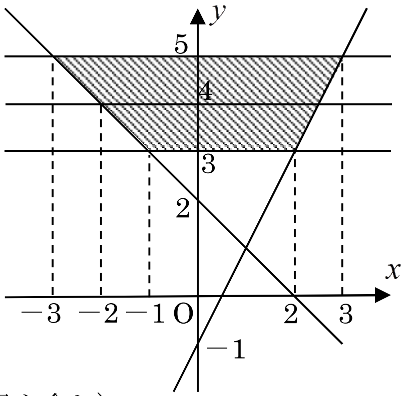
$2x^2+xy-y^2-5x+y+2 \leqq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+y-2)(2x-y-1) \leqq 0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-2 \geqq 0 \\ 2x-y-1 \leqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x+y-2 \leqq 0 \\ 2x-y-1 \geqq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqq -x+2 \\ y \geqq 2x-1 \end{cases}$ または $\begin{cases} y \leqq -x+2 \\ y \leqq 2x-1 \end{cases}$

であり，さらに$3 \leqq y \leqq 5$から，領域Dは右図の斜線部(境界を含む)



領域D内の格子点の個数は

$y=3$のとき，$x=$−1，0，1，2の４個

$y=4$のとき，$x=$−2，−1，0，1，2の５個

$y=5$のとき，$x=$−3，−2，−1，0，1，2，3の７個

より

$4+5+7=\underline{16}$(個)　…$\boxed{エオ}$

(3)　直線ℓの式をmについて整理すると

$m(x+4)+(-y+1)=0$

であるから，これをmの恒等式と考えると

$\begin{cases} x+4=0 \\ -y+1=0 \end{cases}$　$\therefore \mathrm{P}(\underline{-4},\ \underline{1})$　…$\boxed{カキ,ク}$

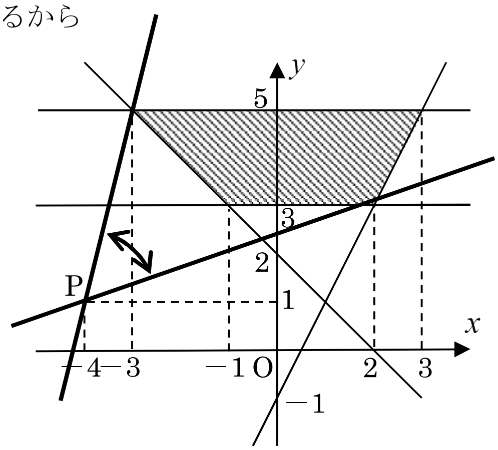
よって，直線ℓは点(−4，1)を通る傾きmの直線であるから

mが最大$\Leftrightarrow \ell$が点(−3，5)を通るときより

$-3m-5+4m+1=0 \quad \therefore m=4$

mが最小$\Leftrightarrow \ell$が点(2，3)を通るときより

$2m-3+4m+1=0 \quad \therefore m=\dfrac{1}{3}$



よって，求めるmの値の範囲は

$\underline{\dfrac{1}{3}} \leqq m \leqq \underline{4}$　…$\boxed{ケ,コ,サ}$

(1)　10 人の保健の得点の平均値 A は

$$A = (7+9+9+10+12+13+14+14+15+17) \div 10 = \underline{12.0} \quad \cdots \boxed{アイ,ウ}$$

10 人の歌の得点の平均値は 15 であるから

$$13+14+13+B+13+18+16+13+18+15 = 15 \cdot 10$$

$$\therefore B = \underline{17} \quad \cdots \boxed{エオ}$$

(2)　保健,歌の得点をそれぞれ変量 x，y とする

	x (保健)	y (歌)	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
生徒 1	7	13	$(-5)^2$	$(-2)^2$	$(-5)\cdot(-2)$
生徒 2	9	14	$(-3)^2$	$(-1)^2$	$(-3)\cdot(-1)$
生徒 3	9	13	$(-3)^2$	$(-2)^2$	$(-3)\cdot(-2)$
生徒 4	10	17	$(-2)^2$	2^2	$(-2)\cdot 2$
生徒 5	12	13	0^2	$(-2)^2$	$0\cdot(-2)$
生徒 6	13	18	1^2	3^2	$1\cdot 3$
生徒 7	14	16	2^2	1^2	$2\cdot 1$
生徒 8	14	13	2^2	$(-2)^2$	$2\cdot(-2)$
生徒 9	15	18	3^2	3^2	$3\cdot 3$
生徒 10	17	15	5^2	0^2	$5\cdot 0$
平均値	12.0	15.0			

表より

10 人の保健の得点の分散 C の値は

$$\left\{(-5)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-2)^2+0^2+1^2+2^2+2^2+3^2+5^2\right\} \div 10 = \underline{9.0} \quad \cdots \boxed{カ,キ}$$

10 人の保健と歌の得点の共分散は

$$\left\{(-5)\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 3+2\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot 3+5\cdot 0\right\} \div 10$$

$$= \underline{2.5} \quad \cdots \boxed{ク,ケ}$$

さらに，変量 x，y の標準偏差はそれぞれ $\sqrt{9}=3$，$\sqrt{4}=2$ であるから，

10 人の保健と歌の得点の相関係数は

$$\frac{2.5}{3\cdot 2} = 0.416\cdots \fallingdotseq \underline{0.42} \quad \cdots \boxed{コ,サシ}$$

$t=\sin x+\cos x$ とすると

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=1+\sin 2x$$
$$\therefore \sin 2x=t^2-1$$

であるから

$$y=t^2-1-2t+4$$
$$=\underline{t^2-2t+3}\ \cdots\boxed{ア,イ}$$

また

$$t=\underline{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\ \cdots\boxed{ウ,エ}$$

であり，$0\leqq x\leqq\pi$ より

$$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$
$$\therefore \underline{-1}\leqq t\leqq\underline{\sqrt{2}}\ \cdots\boxed{オカ,キ}$$

よって

$$y=(t-1)^2+2$$

であるから

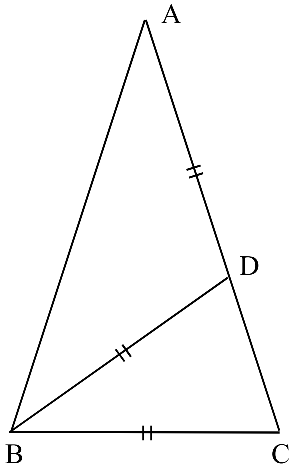
$t=-1$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\Leftrightarrow$　$x=\pi$　のとき

最大値　$\underline{6}$　$\cdots\boxed{ク}$

$t=1$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\Leftrightarrow$　$x=0,\frac{\pi}{2}$　のとき

最小値は　$\underline{2}$　$\cdots\boxed{ケ}$

をとる



(1)　△ABC は二等辺三角形であるから

$$\angle BAC = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = \underline{36^\circ} \quad \cdots \boxed{アイ}$$

BD は∠ABC の二等分線であるから

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = \underline{36^\circ} \quad \cdots \boxed{ウエ}$$

よって，∠DAB＝∠DBA＝36° より，DA＝DB

さらに，△ABC∽△BCD より，BD＝BC

ゆえに，BC＝BD＝AD＝$\underline{1}$ …$\boxed{オ}$

角の二等分線の性質より，BA：BC＝AD：DC

さらに，AB＝AC＝1＋CD であるから

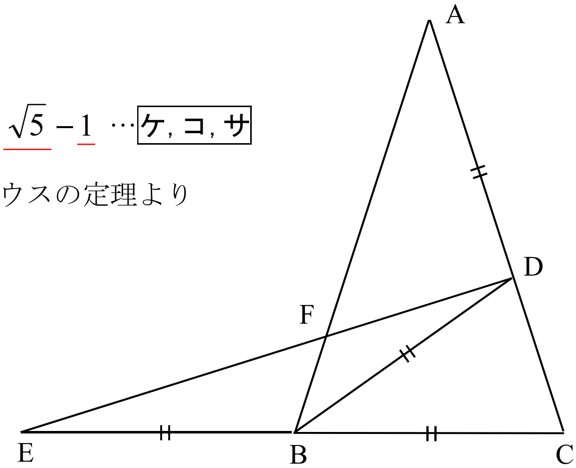
$$1 + CD : 1 = 1 : CD$$

$$CD^2 + CD - 1 = 0$$

$$\therefore CD = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

CD＞0 より　$CD = \underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ …$\boxed{カ,キ,ク}$

したがって　$AD : DC = 1 : \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \underline{2} : \underline{\sqrt{5}} - \underline{1}$ …$\boxed{ケ,コ,サ}$



(2)　△ABC と直線 DE について，メネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \underline{1} + \underline{\sqrt{5}} \quad \cdots \boxed{シ,ス}$$

よって，$AF = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}AB$ であり，(1)より $AB = AC = 1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから

$$S_1 : S_2 = AB \times AC : AF \times AD$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} : \frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 1 = \frac{2+\sqrt{5}}{2} : 1$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{9+4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \underline{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} \quad \cdots \boxed{セ,ソ,タ}$$

$n \geqq 2$ のとき，第 n 群の初項は，数列 $\{a_n\}$ の

$$2+4+6+\cdots+2(n-1)+1=\frac{1}{2}(n-1)\{2+2(n-1)\}+1$$

$$=n^2-n+\underline{1}\ \cdots\boxed{ア}\ （項）$$

これは $n=1$ のときも成り立つ
数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_m は

$$a_m=5+(m-1)\cdot 2=2m+3$$

であるから

$$b_n=a_{n^2-n+1}=2(n^2-n+1)+3$$

$$=\underline{2}\,n^2-\underline{2}\,n+\underline{5}\ \cdots\boxed{イ,ウ,エ}$$

よって，S_n は，初項 b_n，公差 2，項数 $2n$ の等差数列の和であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2n\{2(2n^2-2n+5)+(2n-1)\cdot 2\}$$

$$=\underline{4}\,n(n^2+\underline{2})\ \cdots\boxed{オ,カ}$$

2017 が第 n 群の項であるとすると，$b_n \leqq 2017 < b_{n+1}$ より

$$2n^2-2n+5 \leqq 2017 < 2(n+1)^2-2(n+1)+5$$

$$n(n-1) \leqq 1006 < n(n+1)$$

$32\times 31=992$，$33\times 32=1056$ であるから，これを満たす自然数 n は，$n=\underline{32}\ \cdots\boxed{キク}$
さらに，第 32 群の初項は

$$b_{32}=2\cdot 32^2-2\cdot 32+5=1989$$

であるから，2017 を第 32 群の第 ℓ 項の数であるとすると

$$2017=1989+(\ell-1)\cdot 2$$

$$\therefore \ell=\underline{15}\ \cdots\boxed{ケコ}$$

$$y=\{x-(a-2)\}^2-a^2+5a-4$$

より，G の頂点の座標は

$(a-\underline{2},\ -a^2+\underline{5}\,a-\underline{4})$ …$\boxed{ア,イ,ウ}$

(1)　$f(x)=x^2-2(a-2)x+a$ とおく

G は下に凸の放物線であるから，x 軸と共有点を持つ条件は

$-a^2+5a-4\leqq 0$

$a^2-5a+4\geqq 0$

$(a-1)(a-4)\geqq 0$

$\therefore a\leqq 1,\ 4\leqq a$・・・①

さらに，その共有点の x 座標がともに 1 より大きくなるための条件は

$a-2>1$　かつ　$f(1)=-a+5>0$

$\therefore a>3$　かつ　$a<5$・・・②

①，②より，求める a の値の範囲は

$\underline{4}\ \underline{\leqq}\, a\, \underline{<}\ \underline{5}$ …$\boxed{エ,キ}$　(③…$\boxed{オ}$，①…$\boxed{カ}$)

また，x 軸との共有点の x 座標が 1 より大きい，1 より小さい値を 1 つずつもつ条件は

$f(1)=-a+5<0$

$a\ \underline{>}\ \underline{5}$ …$\boxed{ケ}$　(⓪…$\boxed{ク}$)

$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ であるから，（相加平均）≧（相乗平均）により

$$2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}$$
$$\therefore t \geqq 2$$

等号が成り立つのは，$2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである

よって，t の最小値は $\underline{2}$ …$\boxed{ア}$ であり，t は 2 以上のすべての実数をとり得る

また

$$t^2=4^x+2+4^{-x}$$
$$\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$$

であるから，y を t で表すと

$$y=t^2-2-8t+20$$
$$=t^2-\underline{8}\,t+\underline{18} \quad \cdots\boxed{イ,\ ウエ}$$
$$=(t-4)^2+2$$

$t\geqq 2$ より，y は $t=\underline{4}$ …$\boxed{オ}$ のとき最小値 $\underline{2}$ …$\boxed{カ}$ をとる

さらに，$t=4$ のときの x の値は

$$2^x+2^{-x}=4$$
$$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$$
$$2^x=2\pm\sqrt{3}$$
$$\therefore x=\log_2(\underline{2}\pm\underline{\sqrt{3}}) \quad \cdots\boxed{キ,\ ク}$$

(1)　$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

より，正の約数の個数は

$(5+1)\times(2+1)\times(1+1) = \underline{36}$（個）…$\boxed{\text{アイ}}$

また，その総和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)\times(1+3+3^2)\times(1+7)$

$= \dfrac{2^6-1}{2-1}\times\dfrac{3^3-1}{3-1}\times 8$

$= 63\times 13\times 8$

であるから，正の約数の平均は

$\dfrac{63\times 13\times 8}{36} = \underline{182}$ …$\boxed{\text{ウエオ}}$

※この問題は 2016 年度慶応大学(理工)の入試問題です。
　約数の総和は数ⅠA の範囲外ですが、ついでに出題しておきます。

(2)　$2017_{(8)}$ を 10 進法で表すと

$2\times 8^3 + 0\times 8^2 + 1\times 8 + 7$

$= 1024 + 8 + 7$

$= 1039$

1039 を 5 進法で表すと

$\underline{13124_{(5)}}$ …$\boxed{\text{カキクケコ}}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1039 \\ 5 & 207 \cdots 4 \\ 5 & 41 \cdots 2 \\ 5 & 8 \cdots 1 \\ & 1 \cdots 3 \end{array}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = a \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

$$\int_0^2 f(t)dt = b \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

とすると

$$f(x) = 3x^2 + 2ax + 3b$$

①より

$$a = \int_0^1 (3t^2 + 2at + 3b)dt$$

$$= \left[t^3 + at^2 + 3bt\right]_0^1$$

$$= 1 + a + 3b$$

$$\therefore b = \frac{-1}{3} \quad \cdots \boxed{アイ, ウ}$$

②より

$$b = \int_0^2 (3t^2 + 2at + 3b)dt$$

$$= \left[t^3 + at^2 + 3bt\right]_0^2$$

$$= 8 + 4a + 6b$$

$$\therefore 4a + 5b + 8 = 0$$

これと $b = -\frac{1}{3}$ より

$$a = \frac{-19}{12} \quad \cdots \boxed{エオカ, キク}$$

よって

$$f(x) = 3x^2 - \frac{19}{6}x - 1 \quad \cdots \boxed{ケコ, サ, シ}$$

(1)　3 回とも白球である確率は

$$\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdots \boxed{ア,イ}$$

3 回のうち少なくとも 1 個は白球である確率は，3 回とも白球が出ない場合の余事象なので

$$1-\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \frac{7}{8} \cdots \boxed{ウ,エ}$$

(2)　この作業を 5 回おこなうとき，青球がちょうど 3 回でる確率は

$${}_5C_3\left(\frac{2}{8}\right)^3\left(1-\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{45}{512} \cdots \boxed{オカ,キクケ}$$

点 L は辺 OA を 2 : 3 に内分する点，点 M は辺 OB の中点，点 N は辺 OC を 3 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OL}=\frac{2}{5}\vec{a},\quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{ON}=\frac{3}{4}\vec{c}$$

となり，点 G は△LMN の重心であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ON}\quad\cdots\boxed{ア,イ}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\vec{c}\\&=\frac{2}{15}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\quad\cdots\boxed{ウ,エオ,カ,キ,ク,ケ}\end{aligned}$$

点 P は直線 OG 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=k\overrightarrow{OG}\\&=\frac{2k}{15}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる

さらに，点 P は△ABC 上の点であるから

$$\frac{2k}{15}+\frac{k}{6}+\frac{k}{4}=1$$

$$\therefore k=\frac{20}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{OP}=\frac{20}{11}\overrightarrow{OG}\quad\cdots\boxed{コサ,シス}$$