問 題　【センター試験数学／前期・第7講】

座標平面上の点 $\mathrm{P}(k,\ 0)$ から 3 次曲線 C: $y=x^3-2x+4$ へ 2 本の接線が引けるとき，k の値を求めよ。

☑ 接線の本数

3次曲線に接線を引く問題では、接線を1本引くと曲線とその接線との接点は必ず1か所だけあります。つまり、接線1本の上には接点は1個だけです。0個だったり2個、3個あることはありません。

解 答

3 次曲線 C: $y=x^3-2x+4$ 上の点 $\mathrm{Q}(a,\ a^3-2a+4)$ をとる。この点における曲線 C の接線の方程式は

$$y-(a^3-2a+4)=(3a^2-2)(x-a)$$

この直線（接線）が点 P を通るとき，

$$-(a^3-2a+4)=(3a^2-2)(k-a)$$

すなわち $2a^3-3ka^2+2k-4=0$ が成り立ち，この a についての方程式の解 a が**接線と曲線との接点の x 座標を表す。**

したがって，題意を満たすには，この方程式の解が 2 つ存在すればよい。

ここで，$f(a)=2a^3-3ka^2+2k-4$ とおき，$f(a)$ の増減を調べると

$$f'(a)=6a^2-6ka=6a(a-k)$$

となり，$k=0$ のとき $f'(a)=0$ となる a の値は 0 のみとなって，方程式 $f(a)=0$ の解は $a=0$ のみとなり題意を満たさない。したがって，k は 0 でなく，かつそのときの $f(a)$ の極値 $f(0)$ と $f(k)$ について

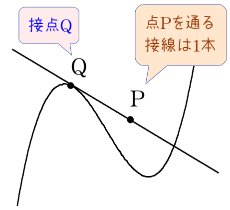
$$f(0)\cdot f(k)=0$$

となればよい。これより，

$$(2k-4)\cdot(-k^3+2k-4)=0$$

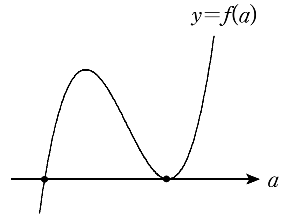
$$2(k-2)\cdot\{-(k+2)(k^2-2k+2)\}=0$$

ゆえに　$\boldsymbol{k=-2,\ 2}$



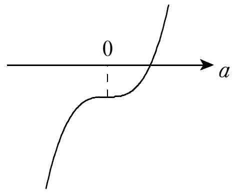
微分すると　$y'=3x^2-2$（接線の傾き）

方程式 $f(a)=0$ の解が2個となるようなグラフ



$f'(a)=0$ とすると
　$a=0,\ k$（2個？）
でも、k が 0 になると
　$a=0$ の1つのみ

$k=0$ のときは $f(a)=2a^3-4$



方程式 $f(a)=0$ の解が3個となるようなグラフ（参考）