問題 【高校2年生でここまでは制覇しよう！】

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，θ の関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ は最大値 $\boxed{}$ をとる。

(2) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，θ の関数 $y=\sin\theta-\cos\theta$ は最大値 $\boxed{}$ をとる。

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，θ の関数 $y=\sin\theta-\cos 2\theta$ は最小値 $\boxed{}$ をとる。

(4) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，θ の関数 $y=\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ は最大値 $\boxed{}$ をとる。

解答

(1) **相互関係** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$t=\cos\theta$ とおくと，

$$0 \leqq \theta \leqq \pi \text{ のとき } -1 \leqq t \leqq 1$$

$$\begin{aligned} y &= (1-\cos^2\theta)-\cos\theta \\ &= -t^2-t+1 \\ &= -\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

これにより，y は $-\dfrac{1}{2}$ のときに最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

(2) **三角関数の合成** $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，

$$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi \text{ のとき } \frac{\pi}{4} \leqq \theta-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi \quad \cdots\cdots ①$$

であり，①の範囲で y は $\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき（このとき $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ ）最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

(3) **2倍角の公式** $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$t=\sin\theta$ とおくと，

$$0 \leqq \theta < 2\pi \text{ のとき } -1 \leqq t \leqq 1$$

$$\begin{aligned} y &= \sin\theta-(1-2\sin^2\theta) \\ &= 2t^2+t-1 \\ &= 2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8} \end{aligned}$$

これにより，y は $-\dfrac{1}{4}$ のときに最小値 $-\dfrac{9}{8}$ をとる。

(4)　**2倍角の公式と合成の合わせ技**

$$y=\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$　$\cdots\cdots$②

であり，②の範囲で y は $2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ のとき $\left(\theta=\frac{3}{8}\pi\right)$

最大値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ をとる。