(1)　「$a+b$ が 3 の倍数」⇒「ab が 3 の倍数」は偽　（反例：$a=1$，$b=2$）

「ab が 3 の倍数」⇔「a が 3 の倍数または b が 3 の倍数」であるから

「ab が 3 の倍数」⇒「$a+b$ が 3 の倍数」は偽　（反例：$a=3$，$b=1$）

よって，$a+b$ が 3 の倍数であることは，ab が 3 の倍数であるための

必要条件でも十分条件でもない ③ …ア

(2)　「$x+y$ と xy がともに有理数」⇒「x と y がともに有理数」は偽

（反例：$x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$）

有理数の性質より

「x と y がともに有理数」⇒「$x+y$ と xy がともに有理数」は真

よって，$x+y$ と xy がともに有理数であることは，x と y がともに有理数であるための

必要条件であるが，十分条件でない ① …イ

(3)　$p \Leftrightarrow x=y=z=0$

$q \Leftrightarrow x=y$　または　$y=z$　または　$z=x$

$r \Leftrightarrow x-y=0$ かつ $y-z=0 \Leftrightarrow x=y=z$

これから

「$p \Rightarrow q$」は真，「$q \Rightarrow p$」は偽　（反例：$x=y=1$，$z=2$）

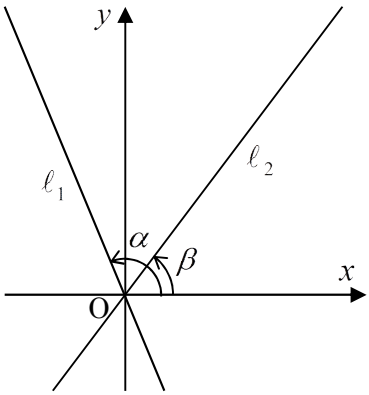
より，p は q であるための 十分条件であるが，必要条件でない ② …ウ

また

「$r \Rightarrow p$」は偽　（反例：$x=y=z=1$），「$p \Rightarrow r$」は真

より，r は p であるための 必要条件であるが，十分条件でない ① …エ

(1)　$\ell_1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{12}{5}x$，$\ell_2 \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると



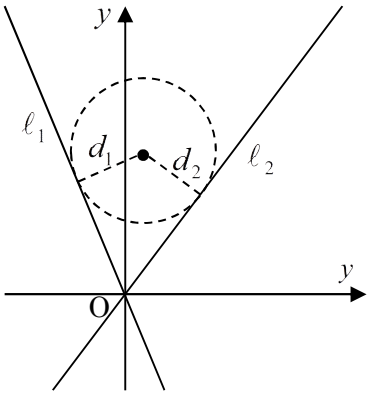
$$\tan\alpha=-\frac{12}{5},\quad \tan\beta=\frac{4}{3}$$

であるから

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{12}{5}-\frac{4}{3}}{1+\left(-\frac{12}{5}\right)\cdot\frac{4}{3}}=\frac{56}{33}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{56}{33}\quad\cdots\boxed{\text{アイ，ウエ}}$$

(2)　点 A$(x,\ y)$ と直線 ℓ_1，ℓ_2 との距離をそれぞれ d_1，d_2 とすると



$$d_1=\frac{|12x+5y|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|12x+5y|}{13}\quad\cdots\boxed{\text{オカ，キ，クケ}}$$

$$d_2=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4x-3y|}{5}\quad\cdots\boxed{\text{コ，サ，シ}}$$

2 つの直線 ℓ_1，ℓ_2 に接する円の中心は，2 直線からの距離が等しい点であるから

$$\frac{|12x+5y|}{13}=\frac{|4x-3y|}{5}$$

$$5(12x+5y)=\pm 13(4x-3y)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{8}x,\quad y=8x$$

よって，2 つの直線 ℓ_1，ℓ_2 に接する円の中心は，2 直線

$$y=\frac{-1}{8}x\quad\cdots\boxed{\text{スセ，ソ}}\quad,\quad y=8x\quad\cdots\boxed{\text{タ}}$$

のいずれかの上にある

(1)　最小値，最大値を比較することにより

A　①または④　　B　②または⑤　　C　⓪または③

であることがわかり，さらに

中央値を比較することにより，A の箱ひげ図は　① …ア

第 3 四分位数を比較することにより，B の箱ひげ図は　⑤ …イ

中央値を比較することにより，C の箱ひげ図は　⓪ …ウ

(2)

⓪　A の人数は 20 人であることと，A の中央値は 150 点であるから，170 点以下の生徒は 10 人以上いるため，正しくない

①　B の第 1 四分位数は 80 点であり，これは小さいほうから 10 番目と 11 番目の平均値であるから，小さいほうから 11 番目以降のデータは，80 点より大きい

同様に，B の第 3 四分位数は 160 点より，30 番目は 160 点より小さい

よって，80 点以上 160 点以下のデータは小さいほうから 11 番目から 30 番目の計 20 個であるから，正しい

②　①の考察より，小さいほうから 30 番目は，160 点以下であるから，正しくない

③　C の部員数は不明であるため，正しくない

④　中央値が 140 点であるから

データの個数が偶数個のとき，140 点以下はちょうど半分

データの個数が奇数個のとき，140 点以下は(データの個数)÷2 を切り上げた数

いずれの場合も，およそ半分は 140 点以下であるといえるので，ただしい

⑤　得点が大きいほうから 2 番目の部員の得点は，最大値より小さいため 240 点未満であることしかわからないため，正しくない

以上より，正しいものは①と④ …エ,オ

$$f(x)=3\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos(2ax)}{2}+\sin(2ax)+\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos(2ax)}{2}-2\sqrt{3}+1$$

$$=\sin(\underline{2a}\ x)-\underline{\sqrt{3}}\cos(2ax)+\underline{1}\ \cdots\boxed{アイ,ウ,エ}$$

$$=\underline{2}\sin\left(2ax-\underline{\frac{\pi}{3}}\right)+1\ \cdots\boxed{オ,カ}$$

また，$0\leqq x<\pi$ より

$$0\leqq 2ax<2a\pi\quad\therefore -\frac{\pi}{3}\leqq 2ax-\frac{\pi}{3}<2a\pi-\frac{\pi}{3}$$

(1)　$a=1$ のとき

$$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\quad\left(-\frac{\pi}{3}\leqq 2x-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，$f(x)\geqq 0$ のとき

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq -\frac{1}{2}$$

より

$$-\frac{\pi}{6}\leqq 2x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{6}\pi\quad\therefore\underline{\frac{\pi}{12}}\leqq x\leqq\underline{\frac{3}{4}}\pi\ \cdots\boxed{キク,ケ,コ}$$

(2)　$f(x)=0$ より

$$\sin\left(2ax-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\quad\left(-\frac{\pi}{3}\leqq 2ax-\frac{\pi}{3}<2a\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

であり，これを満たす x の値は，小さいほうから順に

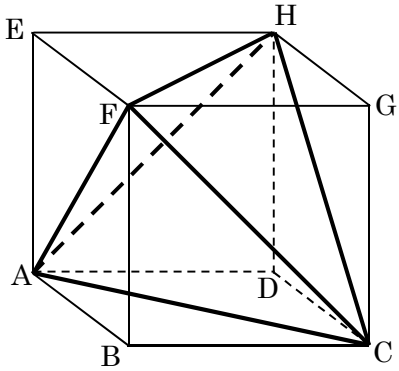
$$2ax-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{12a},\ \frac{3}{4a}\pi,\ \frac{13}{12a}\pi,\ \frac{7}{4a}\pi,\ \cdots\cdots$$

よって，$f(x)=0$ を満たす x がちょうど 3 個存在するとき

$$\frac{13}{12a}\pi<\pi\quad かつ\quad\frac{7}{4a}\pi\geqq\pi$$

$$\therefore\underline{\frac{13}{12}}<a\leqq\underline{\frac{7}{4}}\ \cdots\boxed{サシ,スセ,ソ,タ}$$



三角錐 ABCF の体積は

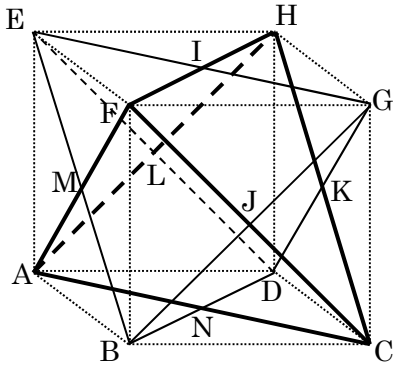
$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{BF}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\cdot1=\frac{1}{6}\quad\cdots\boxed{\text{ア, イ}}$$

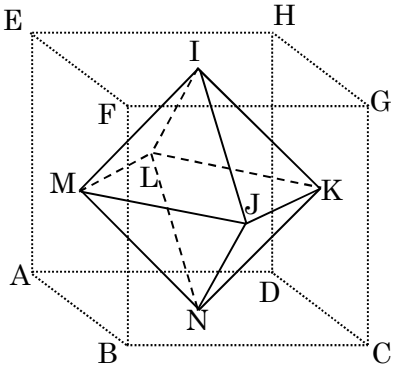
正四面体 ACFH は，立方体から 4 つの三角錐

ABCF，ADCH，EFHA，FGHC

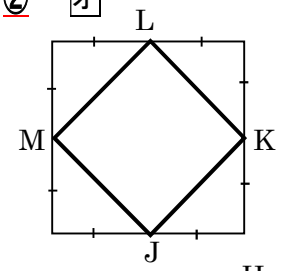
を除いたものであるから，その体積は

$$1^3-\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}\quad\cdots\boxed{\text{ウ, エ}}$$



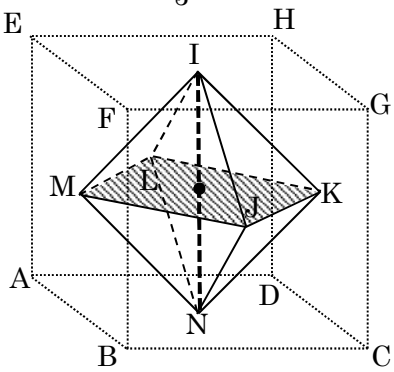


面 EFGH 上の 2 つの図形が重なってできる部分は，2 本の対角線の交点 I のみであり，これはすべての面について同様に言えるので，正多面体 V は 6 つの面の対角線の交点 I，J，K，L，M，N を結んだ図形，すなわち正八面体 IJKLMN　②…オ



立方体を 4 点 J，K，L，M を通る平面で切り取った図形は右のようになるので，正八面体の 1 辺の長さは

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\cdots\boxed{\text{カ, キ}}$$



さらに，正八面体は 2 つの四面体の和であり四面体 I−JKLM の高さは立方体の 1 辺の長さの半分であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{6}\quad\cdots\boxed{\text{ク, ケ}}$$

$a_n = a + (n-1)d$ とすると

$a_8 = 22$ より，$a + 7d = 22$ ・・・①

$a_{11} = 28$ より，$a + 10d = 28$ ・・・②

①，②より，$a = 8$，$d = 2$ であるから　$a_n = 8 + (n-1)\cdot 2 = \underline{2}\,n + \underline{6}$ …$\boxed{ア, イ}$

これから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k+6)\{2(k+1)+6\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= \underline{\frac{n}{16(n+4)}} \quad \cdots\boxed{ウエ, オ}$$

$b_n = br^{n-1}$ とすると

$b_2 + b_3 = 24$ より，$br + br^2 = 24$ ・・・③

$b_5 + b_6 = 192$ より，$br^4 + br^5 = 192 \quad \Leftrightarrow \quad r^3(br + br^2) = 192$ ・・・④

③，④より，$b = 4$，$r = 2$ であるから　$b_n = 4\cdot 2^{n-1} = \underline{2^{n+1}}$ …$\boxed{カ}$　(② …$\boxed{キ}$)

これから

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-3}b_k = \sum_{k=1}^{n} 2k\cdot 2^{k+1}$$

$$= 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots\cdots + 2n\cdot 2^{n+1} \quad ・・・・・・⑤$$

$$2\sum_{k=1}^{n} a_{k-3}b_k = \qquad 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^4 + \cdots\cdots + 2n\cdot 2^{n+2} \quad ・・・⑥$$

⑤－⑥より

$$-\sum_{k=1}^{n} a_{k-3}b_k = 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \cdots\cdots + 2\cdot 2^{n+1} - 2n\cdot 2^{n+2}$$

$$= \frac{8(2^n - 1)}{2-1} - 2n\cdot 2^{n+2}$$

$$= (1-n)\cdot 2^{n+3} - 8$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_{k-3}b_k = (n - \underline{1})\cdot \underline{2^{n+3}} + \underline{8} \quad \cdots\boxed{ク, ケ, サ} \quad (④ \cdots\boxed{コ})$$

$$y=\{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a+3$$

$$=\{x-(a-1)\}^2-a^2+4a+2$$

より，グラフGの頂点の座標は　$(a-\underline{1},\ -a^2+\underline{4}\,a+\underline{2})$ …ア,イ,ウ

(1)　$m=-a^2+4a+2$となるのは

$-1\leqq a-1\leqq 3$

$\underline{0}\leqq a\leqq \underline{4}$ …エ,オ

また

$a-1<-1$つまり$a<0$のとき

$m=\underline{4}\,a+\underline{2}$ …カ,キ　$(x=-1)$

$3<a-1$つまり$4<a$のとき

$m=\underline{-4}\,a+\underline{18}$ …クケ,コサ　$(x=3)$

であるから，$m=-30$のとき

(ｉ)$a<0$のとき

$4a+2=-30$

$\therefore a=-8$　$(\because a<0)$

(ii)$0\leqq a\leqq 4$のとき

$-a^2+4a+2=-30$

$(a+4)(a-8)=0$

$0\leqq a\leqq 4$を満たすaは存在しない

(iii)$4<a$のとき

$-4a+18=-30$

$\therefore a=12$　$(\because 4<a)$

これは$4<a$を満たす

(ｉ)～(iii)より，

$a=\underline{-8},\ \underline{12}$ …シス,セソ

(2)　G_1の頂点の座標は，(−9，−94)

G_2の頂点の座標は，(11，−94)

であるから，G_1をx軸方向に　$11-(-9)=\underline{20}$ …タチ　だけ平行移動すれば，G_2と一致する

第９講　センター数学　１日１枚　[56／84]　　【解答･解説】

(1)　$X=2^x$ とすると

$$y=\frac{1}{2}\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x=\frac{1}{2}X^2-4X=\frac{1}{2}(X-4)^2-8$$

$1\leqq x\leqq 3$ のとき

$$2^1\leqq 2^x\leqq 2^3\quad \therefore 2\leqq X\leqq 8$$

であるから

$X=8\quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{3}$ …$\boxed{ア}$ のとき，最大値 $\underline{0}$ …$\boxed{イ}$

$X=4\quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{2}$ …$\boxed{ウ}$ のとき，最小値 $\underline{-8}$ …$\boxed{エオ}$

(2)　$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\underline{\dfrac{\log_3 x}{2}}$ …$\boxed{カ}$ ，$\log_3\sqrt{x}=\log_3 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_3 x$

であるから，$t=\log_3 x$ とすると

$$y=-\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\log_3 x=-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t=-\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{4}$$

$\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 9$ より

$$\log_3\frac{1}{9}\leqq\log_3 x\leqq\log_3 9\quad\therefore -2\leqq t\leqq 2$$

であるから y は

$t=-1$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$，$t=2$ のとき，最小値 -2

をとるので，$\underline{-2}\leqq y\leqq\underline{\dfrac{1}{4}}$ …$\boxed{キク,ケ,コ}$

また，$y=-2$ のとき，$t=2$ より

$$\log_3 x=2\quad\therefore x=3^2=\underline{9}\ \cdots\boxed{サ}$$

$y=\dfrac{1}{4}$ のとき，$t=-1$ より

$$\log_3 x=-1\quad\therefore x=3^{-1}=\underline{\frac{1}{3}}\ \cdots\boxed{シ,ス}$$

(1)　①より

$$xy-4x+3y=24$$

$$x(y-4)+3(y-4)+12=24$$

$$(x+\underline{3})(y-\underline{4})=\underline{12}$$ …ア，イ，ウエ

ここで，$x \geqq 1$ より $x+3 \geqq 4$ であるから

$(x+3,\ y-4)=(4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$

$\therefore (x,\ y)=(\underline{1},\ \underline{7}),\ (\underline{3},\ \underline{6}),\ (\underline{9},\ \underline{5})$ …オ，カ，キ，ク，ケ，コ

(2)　②の左辺を変形すると

$$x^2-2x-4=(x-1)^2-1-4$$

$$=(x-\underline{1})^2-\underline{5}$$ …サ，シ

であるから，②を変形すると

$$(x-1)^2-y^2=5$$

$$(x+y-1)(x-y-1)=5$$

ここで，x，y は自然数より，$x+y-1 \geqq 1$ かつ $x+y-1>x-y-1$ であるから

$$\begin{cases} x+y-1=5 \\ x-y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

これを解いて

$\therefore (x,\ y)=(\underline{4},\ \underline{2})$ …ス，セ

C_1において，$y'=2x+1$より，点$(t,\ t^2+t+2)$におけるC_1の接線の方程式は

$$y=(2t+1)(x-t)+t^2+t+2$$
$$=(\underline{2}\,t+\underline{1})x-t^{\underline{2}}+\underline{2}\ \cdots\boxed{ア,イ,ウ,エ}$$

これがC_2にも接するとき

$$x^2-7x+10=(2t+1)x-t^2+2$$

$$x^2-(2t+8)x+t^2+8=0\ ・・・①$$

①の判別式をDとすると，$D=0$より

$$\frac{D}{4}=(t+4)^2-(t^2+8)=8t+8=0$$

$$\therefore t=\underline{-1}\ \cdots\boxed{オカ}$$

したがって，直線ℓの方程式は

$$y=\{2\cdot(-1)+1\}x-(-1)^2+2=\underline{-}x+\underline{1}\ \cdots\boxed{キ,ク}$$

であり，ℓとC_2の接点のx座標は，①の重解であるから

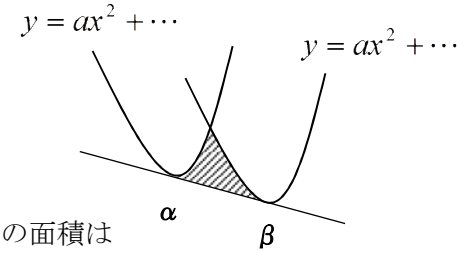
$$x=t+4=3$$

より，ℓとC_2の接点の座標は，$(\underline{3},\ \underline{-2})$ $\cdots\boxed{ケ,コサ}$

(2)　C_1とC_2の共有点のx座標は

$$x^2+x+2=x^2-7x+10$$

$$\therefore x=1$$



よって，2つの曲線C_1，C_2および接線ℓに囲まれた図形の面積は

$$\int_{-1}^{1}\{x^2+x+2-(-x+1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-7x+10-(-x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\underline{\frac{16}{3}}\ \cdots\boxed{シス,セ}$$

2つの放物線$y=ax^2+bx+c$，$y=ax^2+b'x+c'$
およびその共通接線で囲まれた部分(上図)の面積は

$$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

(a：2次関数のx^2の係数，α，β：交点のx座標)

$$\frac{|-1|}{12}\{3-(-1)\}^3=\frac{16}{3}$$

第９講　センター数学　１日１枚　[59／84]　　【解答･解説】

(1)　$X=3$ のとき，Y の取り得る値は，0 , 1 , 2 , 3 の 4 通り …ア

(2)　$X=3$ となるには，硬貨を 3 回投げたうち，3 回表が出ればよいので，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$ …イ，ウ

$X=3$ という条件のもとで，$Y=1$ となる条件付き確率は，
さいころを 3 回投げるとき，1 または 2 が 1 回出る確率であるから

$${}_3C_1\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}$$ …エ，オ

よって，$X=3$，$Y=1$ となる確率は

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$ …カ，キク

同様にして

$X=1$，$Y=1$ となる確率は　${}_3C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{6}=\frac{1}{8}$

$X=2$，$Y=1$ となる確率は　${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times{}_2C_1\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$

したがって，$Y=1$ となる確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{25}{72}$$ …ケコ，サシ

(3)　$Y=1$ となる事象を A，$X=2$ となる事象を B とすると，(2)より

$$P(A)=\frac{25}{72},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

よって，$Y=1$ という条件のもとで，$X=2$ となる条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{72}}=\frac{12}{25}$$ …スセ，ソタ

$\overrightarrow{BA}=(1,\ 1,\ -\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(2,\ -2,\ 2\sqrt{2})$であるから

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot 2+1\cdot(-2)+\left(-\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}=\underline{-4}\ \cdots\boxed{アイ}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{1^2+1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\underline{2}\ \cdots\boxed{ウ}$$

さらに

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$$

より

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{-4}{2\cdot 4}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\angle ABC=\underline{120^\circ}\ \cdots\boxed{エオカ}$$

さらに

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin 120^\circ=\underline{2\sqrt{3}}\ \cdots\boxed{キ,ク}$$

点 D を$(x,\ y,\ z)$とすると，点 D は直線 BC 上にあるので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}$$

と表されるので

$$(x-1,\ y-2,\ z-\sqrt{2})=k(2,\ -2,\ 2\sqrt{2})$$

$$\therefore(x,\ y,\ z)=(2k+1,\ -2k+2,\ 2\sqrt{2}k+\sqrt{2})$$

AD⊥BC より

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(2k-1,\ -2k-1,\ 2\sqrt{2}k+\sqrt{2})\cdot(2,\ -2,\ 2\sqrt{2})=0$$

$$(2k-1)\cdot 2+(-2k-1)\cdot(-2)+\left(2\sqrt{2}k+\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{4}\qquad\therefore\underline{D\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\ \cdots\boxed{ケ,コ,サ,シ}$$