(1)　$x=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=2+\sqrt{3}$

$y=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=2-\sqrt{3}$

より

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=\underline{4}\ \cdots\boxed{\text{ア}}$

さらに

$xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$

より

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=\underline{14}\ \cdots\boxed{\text{イウ}}$

(2)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{216}}{9}=\dfrac{3\pm 6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{1\pm 2\sqrt{6}}{3}$　より

$\alpha=\underline{\dfrac{1+2\sqrt{6}}{3}}\ \cdots\boxed{\text{エ, オ, カ, キ}}$

また，$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ より

$\sqrt{16}<\sqrt{24}<\sqrt{25}$

$\therefore 4<2\sqrt{6}<5$

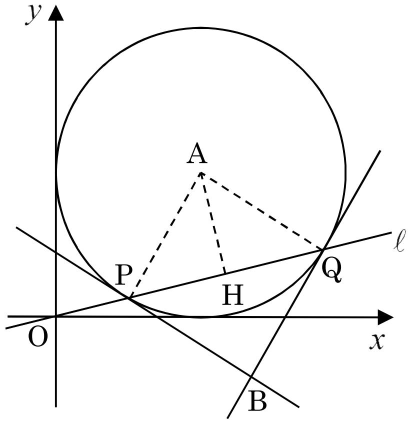
であるから

$\dfrac{5}{3}<\dfrac{1+2\sqrt{6}}{3}<2$

よって，$n<\alpha<n+1$を満たす整数nの値は$n=\underline{1}\ \cdots\boxed{\text{ク}}$

(1)　∠APB＝∠AQB＝∠PBQ＝90°より，∠PAB＝$\underline{90°}$　…$\boxed{\text{アイ}}$

よって，PQ＝$\sqrt{1^2+1^2}=\underline{\sqrt{2}}$　…$\boxed{\text{ウ}}$



PQ の中点を H とすると，AP＝1，PH＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より

$$AH=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，点 A(1，1)と直線 $\ell \Leftrightarrow ax-y=0$ との距離 d は

$$d=\underline{\frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}}\quad\cdots\boxed{\text{エ, オ}}$$

よって

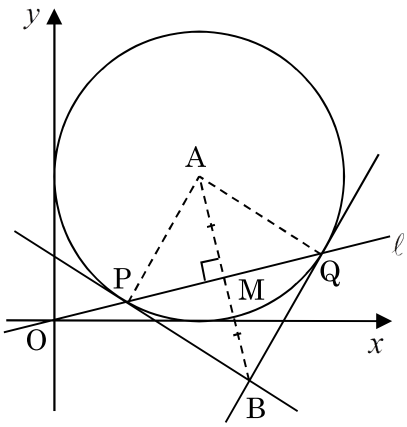
$$\frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2-4a+1=0$$

$$\therefore a=\underline{2}-\underline{\sqrt{3}}\ (\because 0<a<1)\quad\cdots\boxed{\text{カ, キ}}$$

(2)　点 B の座標を(X，Y)とすると，点 B は直線 ℓ に関して点 A と対称な点である

直線 AB の傾きは $\underline{\dfrac{Y-1}{X-1}}$　…$\boxed{\text{ク, ケ}}$　であるから，



直線 AB は直線 ℓ に垂直なので

$$\frac{Y-1}{X-1}\cdot a=-1\quad\therefore X+aY=a+1\ \cdot\cdot\cdot ①$$

線分 AB の中点$\left(\underline{\dfrac{X+1}{2}},\ \underline{\dfrac{Y+1}{2}}\right)$　…$\boxed{\text{コ, サ, シ, ス}}$

は直線 ℓ 上にあるので

$$\frac{Y+1}{2}=a\cdot\frac{X+1}{2}\quad\therefore aX-Y=-a+1\ \cdot\cdot\cdot ②$$

①，②より

$$X=\underline{\frac{-a^2+2a+1}{a^2+1}}\ \cdots\boxed{\text{セ, ソ, タ, チ}}\ ,\quad Y=\underline{\frac{a^2+2a-1}{a^2+1}}\ \cdots\boxed{\text{ツ, テ, ト}}$$

(3)　(1)，(2)より

$$(X,\ Y)=\left(\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{2}},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\quad\cdots\boxed{\text{ナ, ニ, ヌ}}$$

(1)　$A=4$ のとき，10 個のデータを小さいほうから順に並べると

3，3，4，4，5，6，6，7，9，10

であるから

中央値は $\dfrac{5+6}{2}=\underline{5.5}$ …$\boxed{ア.イ}$

10 個の平均は　$57\div 10=\underline{5.7}$ …$\boxed{ウ.エ}$

(2)　10 個の平均値を $\overline{x}$ とすると

$$7+6+A+3+10+5+4+6+9+3=10\overline{x}$$

$\therefore A+\underline{53}=10\overline{x}$ …$\boxed{オカ}$　・・・①

さらに，10 個のデータをそれぞれ 2 乗したデータの平均値 $\overline{x^2}$ は

$$\overline{x^2}=\left(7^2+6^2+A^2+3^2+10^2+5^2+4^2+6^2+9^2+3^2\right)\div 10=\frac{A^2+361}{10}$$

であるから，10 個のデータの分散が 5 のとき

$\dfrac{A^2+\underline{361}}{10}-\left(\overline{x}\right)^2=5$ …$\boxed{キクケ}$　・・・②

①，②より

$$9A^2-106A+301=0$$

$$(9A-43)(A-7)=0$$

A は整数なので

$A=\underline{7}$ …$\boxed{コ}$，$\overline{x}=\underline{6}$ …$\boxed{サ}$

$t=\sin^2\theta$ とすると

$$\cos^4\theta=(1-\sin^2\theta)^2$$
$$=(1-t)^2$$
$$=t^2-\underline{2}\,t+\underline{1}\quad\cdots\boxed{ア,イ}$$

であるから，①を t で表すと

$$t^2+(t^2-2t+1)+2t+(1-t)-1=a$$
$$2t^2-t+1=a$$
$$\therefore \underline{2}\left(t-\frac{1}{\underline{4}}\right)^2+\frac{7}{\underline{8}}=a\quad\cdots\boxed{ウ,エ,オ,カ,キ}\quad\cdots②$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$-1\leqq\sin\theta\leqq1$$
$$\therefore \underline{0}\leqq t\leqq\underline{1}\quad\cdots\boxed{ク,ケ}$$

であり，$t=\sin^2\theta$ を満たす異なる θ の個数は

$t=0$ のとき，$\sin^2\theta=0\quad\Leftrightarrow\quad\sin\theta=0$

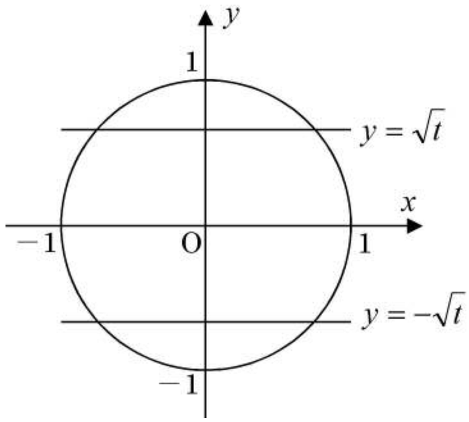
より，θ は 0，π の $\underline{2}$ 個$\cdots\boxed{コ}$

$0<t<1$ のとき，$\sin^2\theta=t\quad\Leftrightarrow\quad\sin\theta=\pm\sqrt{t}$

より，θ は $\underline{4}$ 個$\cdots\boxed{サ}$

$t=1$ のとき，$\sin^2\theta=1\quad\Leftrightarrow\quad\sin\theta=\pm1$

より，θ は $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ の $\underline{2}$ 個$\cdots\boxed{シ}$



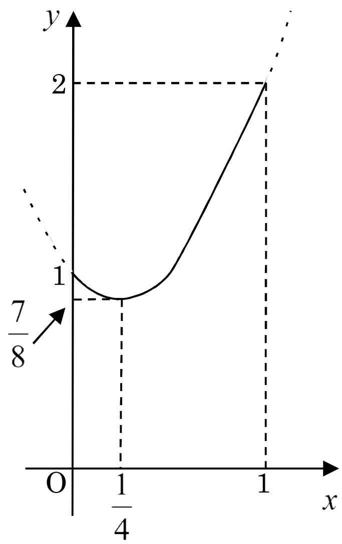
①が異なる 4 個の解をもつには，t の方程式②が

$0<t<1$ の範囲に 1 つだけ解をもてばよい

すなわち，$y=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$ と $y=a$ が $0<t<1$ の

範囲に交点を 1 つだけもてばよいのでの，求める範囲は

$$a=\underline{\frac{7}{8}}\quad\cdots\boxed{ス,セ}\quad,\quad\underline{1}<a<\underline{2}\quad\cdots\boxed{ソ,タ}$$



円に内接する四角形の性質より

$$\angle ADC = 180° - \angle ABC = \underline{120°} \quad \cdots \boxed{アイウ}$$

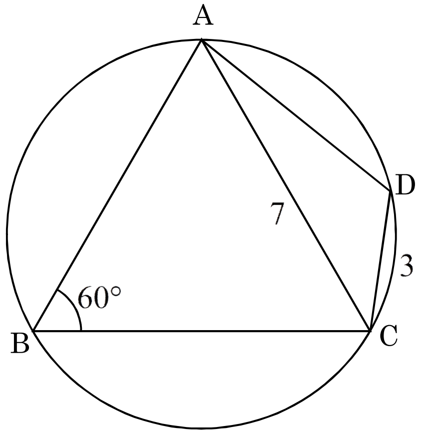
であるから，△ACD において，余弦定理より

$$7^2 = 3^2 + AD^2 - 2 \cdot 3 \cdot AD\cos 120°$$

$$AD^2 + 3AD - 40 = 0$$

$$(AD - 5)(AD + 8) = 0$$

$AD > 0$ より，$AD = \underline{5} \quad \cdots \boxed{エ}$



次に，$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角より

$$\angle BDC = \angle BAC = \underline{60°} \quad \cdots \boxed{オカ} \cdot\cdot\cdot ①$$

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角より

$$\angle ADB = \angle ACB = 60° \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①，②より，$\angle BDC = \angle ADB$ である

よって，DE は$\angle ADC$ の二等分線であるから

$$AE : EC = AD : DC = \underline{5} : 3 \quad \cdots \boxed{キ}$$

したがって

$$AE = \frac{5}{8}AC = \underline{\frac{35}{8}} \quad \cdots \boxed{クケ,コ}$$

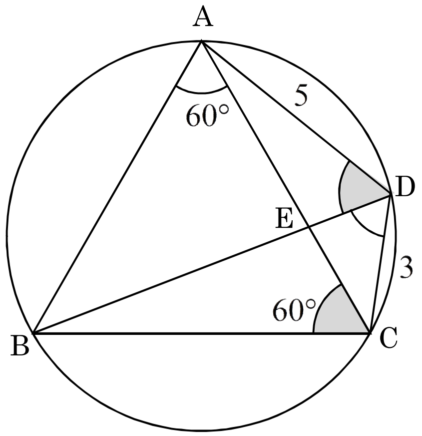
$$EC = AC - AE = \frac{21}{8}$$

方べきの定理より

$$EB \cdot ED = AE \cdot EC$$

$$= \frac{21}{8} \cdot \frac{35}{8}$$

$$= \underline{\frac{735}{64}} \quad \cdots \boxed{サシス,セソ}$$



$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とすると，①は

$$S_n=2a_n+n+2 \quad \cdots ②$$

$S_1=a_1$ であるから，②において，$n=1$ とすると

$$a_1=2a_1+1+2$$

$$\therefore a_1=\underline{-3} \quad \cdots \boxed{アイ}$$

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ であるから，②より

$$2a_{n+1}+(n+1)+2=2a_n+n+2+a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1}=\underline{2}\,a_n-\underline{1} \quad \cdots \boxed{ウ,エ}$$

$\alpha=2\alpha-1$ を解くと，$\alpha=1$ より

$$a_{n+1}-\underline{1}=\underline{2}\left(a_n-1\right) \quad \cdots \boxed{オ,カ}$$

よって，$\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-3-1=-4$，公比 2 の等比数列より

$$a_n-1=-4\cdot 2^{n-1}=-2^{n+1}$$

$$\therefore a_n=\underline{1}-\underline{2^{n+1}} \quad \cdots \boxed{キ,ク} \quad (\underline{②}\ \cdots \boxed{ケ})$$

さらに，①より

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=2\left(1-2^{n+1}\right)+n+2$$

$$=n-\underline{2^{n+2}}+\underline{4} \quad \cdots \boxed{コ,シ} \quad (\underline{③}\ \cdots \boxed{サ})$$

【参考】

最後の部分は，普通に計算すると

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}$$

$$=n-\frac{4(2^n-1)}{2-1}$$

$$=n-2^{n+2}+4$$

(1)　△ABC において，余弦定理より

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\theta$$
$$= 25 - 24\cos\theta \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

△ACD において，余弦定理より

$$AC^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cos(180° - \theta)$$
$$= 17 + 8\cos\theta \quad \cdot\cdot\cdot ② \quad (\because \cos(180° - \theta) = -\cos\theta)$$

①，②より

$$\cos\theta = \frac{1}{4} \ \cdots \boxed{\text{ア, イ}}\ ,\quad AC = \sqrt{19} \ \cdots \boxed{\text{ウエ}}$$

さらに

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

であるから，円 O の半径を R とすると，△ABC において正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin\theta} = 2R \qquad \therefore R = \frac{\sqrt{19}}{2} \div \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}} \ \cdots \boxed{\text{オ, カキ}}$$

(2)　$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin\theta = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\sin(180° - \theta) = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad (\because \sin(180° - \theta) = \sin\theta)$$

であるから

$$\text{四角形 } ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD = 2\sqrt{15} \ \cdots \boxed{\text{ク, ケコ}}$$

また，BE : ED＝△ABC : △ACD より

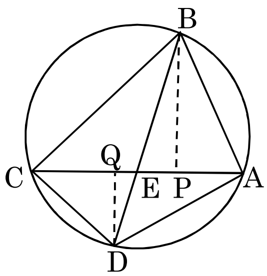
$$BE : ED = \frac{3\sqrt{15}}{2} : \frac{\sqrt{15}}{2} = 3 : 1$$

$$\therefore \frac{DE}{EB} = \frac{1}{3} \ \cdots \boxed{\text{サ, シ}}$$

点 B，D から AC に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q とすると

BE : ED＝BP : DQ

＝△ABC : △ACD



$x+2y=16$

$$y=-\frac{1}{2}x+8\ \cdot\cdot\cdot ①$$

①より，$\log_{10}x+\log_{10}y$ を x の式で表すと

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}x+\log_{10}\left(-\frac{1}{2}x+8\right)$$

$$=\log_{10}\left(\frac{-1}{2}x^2+8x\right)\ \cdots\boxed{\text{アイ,ウ,エ}}$$

$$=\log_{10}\left\{-\frac{1}{2}(x-8)^2+32\right\}$$

$y>0$ および①より

$$-\frac{1}{2}x+8>0$$

$$\therefore x<16$$

これと $x>0$ より

$$0<x<16\ \cdots\boxed{\text{オカ}}$$

底 $10>1$ より，真数 $-\frac{1}{2}(x-8)^2+32$ が最大となるとき

$\log_{10}\left\{-\frac{1}{2}(x-8)^2+32\right\}$ も最大となるので

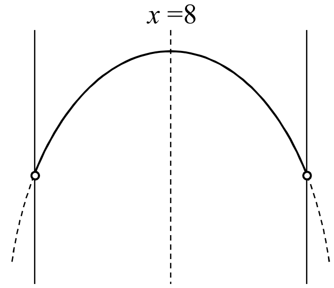
$x=8$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は最大値

$$\log_{10}32=5\log_{10}2\ \cdots\boxed{\text{キ,ク}}$$

をとり，そのときの y の値は，①より

$$y=-\frac{1}{2}\cdot 8+8=4$$

$$\therefore x=8\ \cdots\boxed{\text{ケ}}\ ,\quad y=4\ \cdots\boxed{\text{コ}}$$



(1)　$25 = 9\cdot 2 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 25 - 9\cdot 2$ ・・・②

$9 = 7\cdot 1 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 9 - 7\cdot 1$ ・・・③

$7 = 2\cdot 3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 7 - 2\cdot 3$ ・・・④

であるから，③を④に代入すると

$$\begin{aligned}1 &= 7 - (9-7)\cdot 3\\ &= 7 - 9\cdot 3 + 7\cdot 3\\ &= 7\cdot 4 - 9\cdot 3\end{aligned}$$

さらに②を代入して

$$\begin{aligned}1 &= (25 - 9\cdot 2)\cdot 4 - 9\cdot 3\\ &= 25\cdot 4 - 9\cdot 8 - 9\cdot 3\\ &= 25\cdot 4 - 9\cdot 11\end{aligned}$$

$\therefore 25\cdot 4 + 9\cdot(-11) = 1$ ・・・⑤

よって，$25x + 9y = 1$ を満たす解のひとつは

$x = \underline{4}$ $\cdots\boxed{ア}$　，　$y = \underline{-11}$ $\cdots\boxed{イウエ}$

(2)　$25x + 9y = 33$ ・・・①

⑤×33 より

$25\cdot 132 + 9\cdot(-363) = 33$ ・・・⑥

①－⑥より

$25(x-132) + 9(y+363) = 0$

$25(x-132) = 9(-y-363)$

25 と 9 は互いに素であるから，整数kを用いて

$x - 132 = 9k$，　$-y - 363 = 25k$

$\therefore x = 9k + 132$，　$y = -25k - 363$

よって

$$|x+y| = |-16k - 231|$$

であり，$-16k - 231 = 0$ を解くと，$k = -\dfrac{231}{16}$　$(= -14.4\cdots)$

$k = -14$ のとき，$|x+y| = |-16\cdot(-14) - 231| = |-7| = 7$

$k = -15$ のとき，$|x+y| = |-16\cdot(-15) - 231| = |9| = 9$

したがって，$|x+y|$ が最小となるのは $k = -14$ のときであり，このとき

$x = 9\cdot(-14) + 132 = \underline{6}$ $\cdots\boxed{オ}$　，　$y = -25\cdot(-14) - 363 = \underline{-13}$ $\cdots\boxed{カキク}$

(1)　$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

であるから，増減表は次のようになる

t	……	-2	……	2	……
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

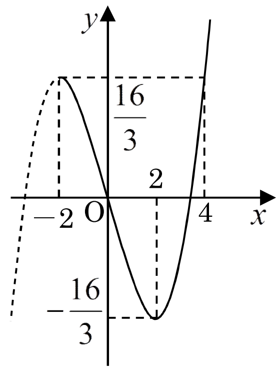
よって，$f(x)$ は

$x=-2$ …$\boxed{アイ}$　のとき極大値 $f(-2)=\dfrac{16}{3}$ …$\boxed{ウエ, オ}$

$x=2$ …$\boxed{カ}$　のとき極小値 $f(2)=\dfrac{-16}{3}$ …$\boxed{キクケ, コ}$

をとる

(2)　(1)より，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる



よって，$m=\dfrac{1}{3}a^3-4a$ となるのは

$-2<a\leqq 2$ …$\boxed{サ}$

であり，$2<a$ のとき

$m=f(2)=\dfrac{-16}{3}$ …$\boxed{シスセ, ソ}$

さらに，$f(x)=\dfrac{16}{3}$ のとき

$\dfrac{1}{3}x^3-4x=\dfrac{16}{3}$

$x^3-12x-16=0$

$(x+2)^2(x-4)=0$

$\therefore x=-2,\ 4$

であるから，$M=\dfrac{1}{3}a^3-4a$ となるのは

$4\leqq a$ …$\boxed{タ}$

すべての取り出し方は

$${}_{12}C_3 = \underline{220} \cdots \boxed{\text{アイウ}}\ (\text{通り})$$

3 個の色がすべて異なるような玉の色は，(赤，黄，白)の 1 通り

それぞれの色の玉に書かれた番号は 1 から 4 の 4 通りずつあるので

$$4^3 = \underline{64} \cdots \boxed{\text{エオ}}\ (\text{通り})$$

3 個の番号がすべて異なるような番号の組み合わせは

${}_4C_3$通り

さらに，それぞれの番号の玉の色は赤，黄，白の 3 通りずつあるので

$${}_4C_3 \times 3^3 = \underline{108} \cdots \boxed{\text{カキク}}\ (\text{通り})$$

3 個の色がすべて異なるような玉の色は，(赤，黄，白)の 1 通り

それぞれの色の玉に書かれた番号は 1 から 4 の 4 つの数から 3 つを選んで並べればよいので

$${}_4P_3 = \underline{24} \cdots \boxed{\text{ケコ}}\ (\text{通り})$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2 \iff \left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=72$$

であり，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{14}$ より

$$\left(\sqrt{14}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=72 \quad \therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=58 \cdot\cdot\cdot ①$$

同様にして，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$ より　$2\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2=6 \cdot\cdot\cdot ②$

①，②より，$\left|\vec{b}\right|=\underline{\sqrt{26}}\cdots\boxed{アイ}$　，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{16}\cdots\boxed{ウエ}$

(1)　$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=-12$

であるから

$$\cos\theta=\frac{-12}{6\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$\theta=\underline{120°}\cdots\boxed{オカキ}$

(2)　$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2$

$$=14+2t\cdot16+t^2\cdot26$$

$$=26\left(t+\frac{8}{13}\right)^2-26\left(\frac{8}{13}\right)^2+14$$

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq0$ より，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ が最小　$\iff$　$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ が最小　であるから

$$t=\underline{\frac{-8}{13}}\cdots\boxed{クケ,コサ}$$

このとき

$$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2=16-\frac{8}{13}\cdot26=0$$

より，$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\perp\vec{b}$ すなわち $\alpha=\underline{90°}\cdots\boxed{シス}$

※図を書くことにより，逆から考えることもできます。