p ： $x^2+2x-8 \leqq 0 \iff (x+4)(x-2) \leqq 0 \iff -4 \leqq x \leqq 2$

q ： $x^2-8x+15 > 0 \iff (x-3)(x-5) > 0 \iff x<3,\ 5<x$

r ： $x^2-2kx-3k^2 \leqq 0 \iff (x+k)(x-3k) \leqq 0 \iff \begin{cases} -k \leqq x \leqq 3k & (0<k) \\ 3k \leqq x \leqq -k & (k<0) \\ x=0 & (k=0) \end{cases}$

条件 p，q，r を満たす x の集合をそれぞれ P，Q，R とする

(1)　$P \subset Q$ により，

$p \Rightarrow q$ は真，$q \Rightarrow p$ は偽

よって，p は q であるための十分条件② …$\boxed{ア}$

(2)　p が r であるための必要条件となるには，「$r \Rightarrow p$」が真，
すなわち $R \subset P$ となればよいので

$k>0$ のとき

$-4 \leqq -k$ かつ $3k \leqq 2$

$\therefore 0<k \leqq \dfrac{2}{3}$

$k=0$ のとき

$R \subset P$ となる

$k<0$ のとき

$-4 \leqq 3k$ かつ $-k \leqq 2$

$\therefore -\dfrac{4}{3} \leqq k < 0$

$\therefore \dfrac{-4}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$ …$\boxed{イウ,エ,オ,カ}$

(1)　$\angle \mathrm{APB}=90^\circ$ より，円 C は 2 点 A，B を直径の両端とする円である

円 C の中心は，線分 AB の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{2+9}{2},\dfrac{1+8}{2}\right)$　$\therefore \mathrm{M}\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{9}{2}\right)$

また，半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(9-2)^2+(8-1)^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ であるから，円 C の方程式は

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

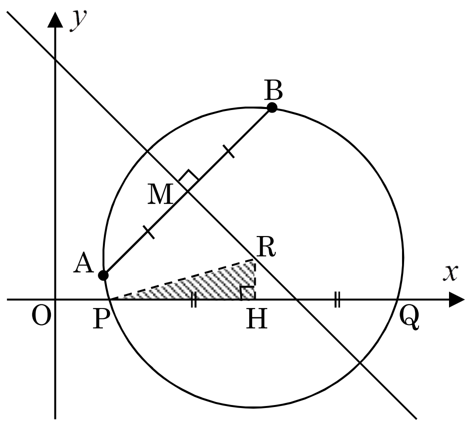
$$\therefore x^2+y^2-\underline{11}\,x-\underline{9}\,y+\underline{26}=0 \quad \cdots \boxed{\text{アイ，ウ，エオ}}$$

(2)　2 点 A，B を通る円の中心は，線分 AB の垂直二等分線上にあり，直線 AB の傾きは，

$\dfrac{8-1}{9-2}=1$ より，線分 AB の垂直二等分線は点 M を通り傾き－1 の直線であるから

$$y-\frac{9}{2}=-\left(x-\frac{11}{2}\right)$$

$$\therefore y=\underline{-}\,x+\underline{10} \quad \cdots \boxed{\text{カ，キク}}$$



よって，円 C の中心 R は $(t,\ -t+10)$ と表されるので

$$r^2=\mathrm{AR}^2=(t-2)^2+\{(-t+10)-1\}^2$$

$$=\underline{2}\,t^2-\underline{22}\,t+\underline{85} \quad \cdots \boxed{\text{ケ，コサ，シス}}$$

線分 PQ の中点を H とすると，$\angle \mathrm{PHR}=90^\circ$ であり

$$\mathrm{PH}=2\sqrt{5},\ \mathrm{RH}=|-t+10|,\ \mathrm{PR}=r$$

であるから，三平方の定理より

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2+|-t+10|^2=2t^2-22t+85$$

$$t^2-2t-35=0$$

$$(t+5)(t-7)=0$$

$$\therefore t=-5,\ 7$$

よって，円 C の方程式は

$t=-5$ のとき，中心$(-5,\ 15)$，$r^2=2\cdot(-5)^2-22\cdot(-5)+85=245$ より

$$(x+5)^2+(y-15)^2=245 \iff x^2+y^2+\underline{10}\,x-\underline{30}\,y+\underline{5}=0 \quad \cdots \boxed{\text{セソ，タチ，ツ}}$$

$t=7$ のとき，中心$(7,\ 3)$，$r^2=2\cdot 7^2-22\cdot 7+85=29$ より

$$(x-7)^2+(y-3)^2=29 \iff x^2+y^2-\underline{14}\,x-\underline{6}\,y+\underline{29}=0 \quad \cdots \boxed{\text{テト，ナ，ニヌ}}$$

(1)　10 人の保健の得点の平均値 A は

$$A=(7+9+9+10+12+13+14+14+15+17)\div 10=\underline{12.0}\quad\cdots\boxed{アイ,ウ}$$

10 人の歌の得点の平均値は 15 であるから

$$13+14+13+B+13+18+16+13+18+15=15\cdot 10$$

$$\therefore B=\underline{17}\quad\cdots\boxed{エオ}$$

(2)　保健,歌の得点をそれぞれ変量 x，y とする

	x(保健)	y(歌)	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
生徒 1	7	13	$(-5)^2$	$(-2)^2$	$(-5)\cdot(-2)$
生徒 2	9	14	$(-3)^2$	$(-1)^2$	$(-3)\cdot(-1)$
生徒 3	9	13	$(-3)^2$	$(-2)^2$	$(-3)\cdot(-2)$
生徒 4	10	17	$(-2)^2$	2^2	$(-2)\cdot 2$
生徒 5	12	13	0^2	$(-2)^2$	$0\cdot(-2)$
生徒 6	13	18	1^2	3^2	$1\cdot 3$
生徒 7	14	16	2^2	1^2	$2\cdot 1$
生徒 8	14	13	2^2	$(-2)^2$	$2\cdot(-2)$
生徒 9	15	18	3^2	3^2	$3\cdot 3$
生徒 10	17	15	5^2	0^2	$5\cdot 0$
平均値	12.0	15.0			

表より

10 人の保健の得点の分散 C の値は

$$\left\{(-5)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-2)^2+0^2+1^2+2^2+2^2+3^2+5^2\right\}\div 10=\underline{9.0}\quad\cdots\boxed{カ,キ}$$

10 人の保健と歌の得点の共分散は

$$\left\{(-5)\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot 2+0\cdot(-2)+1\cdot 3+2\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot 3+5\cdot 0\right\}\div 10$$

$$=\underline{2.5}\quad\cdots\boxed{ク,ケ}$$

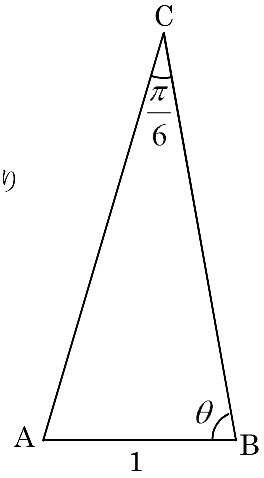
さらに，変量 x，y の標準偏差はそれぞれ $\sqrt{9}=3$，$\sqrt{4}=2$ であるから，

10 人の保健と歌の得点の相関係数は

$$\frac{2.5}{3\cdot 2}=0.416\cdots\fallingdotseq\underline{0.42}\quad\cdots\boxed{コ,サシ}$$

(1)　△ABC において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\qquad \therefore \mathrm{AC}=\underline{2}\sin\theta\quad\cdots\boxed{\text{ア}}$$



$\angle\mathrm{CAB}=\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\underline{\frac{5}{6}}\pi-\theta\quad\cdots\boxed{\text{イ,ウ}}$　であるから，正弦定理より

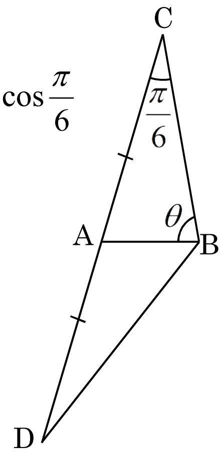
$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{BC}&=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\\&=2\left(\sin\frac{5}{6}\pi\cos\theta-\cos\frac{5}{6}\pi\sin\theta\right)\\&=\underline{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta\quad\cdots\boxed{\text{エ}}\end{aligned}$$

(2)　AD＝AC より

$$\mathrm{CD}=2\mathrm{AC}=2\cdot 2\sin\theta=\underline{4}\sin\theta\quad\cdots\boxed{\text{オ}}$$

であるから，△BCD において，余弦定理より



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(4\sin\theta\right)^2-2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot 4\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6}\\&=7\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\\&=\underline{6}\sin^2\theta-\underline{2\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta+\underline{1}\quad\cdots\boxed{\text{カ,キク,ケ}}\\&=6\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin 2\theta+1\\&=\underline{4}-(\underline{\sqrt{3}}\sin 2\theta+\underline{3}\cos 2\theta)\quad\cdots\boxed{\text{コ,サ,シ}}\\&=4-\underline{2\sqrt{3}}\sin\left(2\theta+\underline{\frac{\pi}{3}}\right)\quad\cdots\boxed{\text{ス,セ,ソ}}\end{aligned}$$

BD^2 が最大となるのは，$2\sqrt{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ が最小となるときであり，$0<\theta<\frac{5}{6}\pi$ より

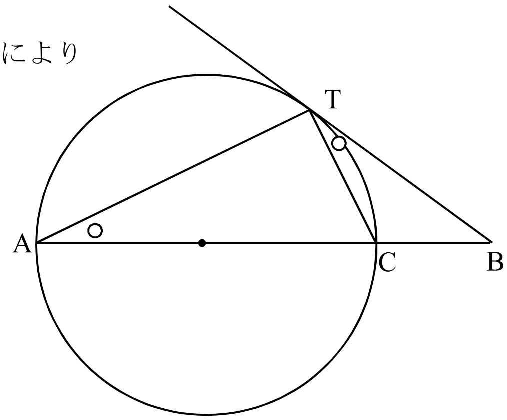
$$\frac{\pi}{3}<2\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$$

であるから，求める θ の値は

$$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \theta=\frac{7}{\underline{12}}\pi\quad\cdots\boxed{\text{タ,チツ}}$$

(1)　BC＝AB－AC＝2 …$\boxed{ア}$　より，方べきの定理により



$BT^2 = BC \times BA = 2 \times 8 = 16$

∴BT＝4 …$\boxed{イ}$

△ABT∽△TBC であるから

AT：TC＝AB：TB＝8：4＝2：1

$\therefore \dfrac{TC}{AT} = \dfrac{1}{2}$ …$\boxed{ウ,エ}$

∴AT＝2TC・・・①

また，∠ATC＝90° …$\boxed{オカ}$　であるから，三平方の定理より

$AT^2 + TC^2 = 6^2 = 36$ …$\boxed{キク}$　・・・②

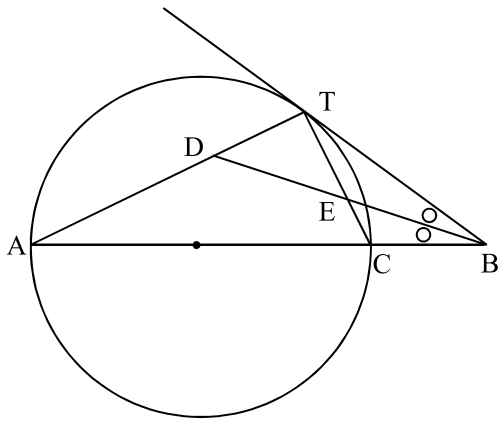
①，②より

$AT = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ …$\boxed{ケコ,サ,シ}$　，$TC = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ …$\boxed{ス,セ,ソ}$

(2)　BD は∠ABT の二等分線であるから

AD：DT＝AB：BT＝8：4＝2：1

よって



$DT = \dfrac{1}{3}AT = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ …$\boxed{タ,チ,ツ}$

同様に

CE：ET＝BC：BT＝2：4＝1：2

であるから

$TE = \dfrac{2}{3}CT = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

ゆえに，DT＝TE であり，∠DTC＝90° より

∠TDE＝∠TED＝45°

であるから

∠ADB＝180°－∠TDE＝135° …$\boxed{テトナ}$

(1)　①の両辺をそれぞれ 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\therefore b_{n+1}=b_n+\underline{2}\cdot\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}\ \cdots\boxed{ア,イ,ウ}$$

$b_1=\dfrac{a_1}{3}=-\dfrac{4}{3}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=-\frac{4}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{8}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\underline{\frac{4}{3}}-\underline{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\boxed{エ,オ,カ,キ}$$

$$\therefore a_n=3^nb_n=\underline{4}\cdot\underline{3^{n-1}}-\underline{8}\cdot\underline{2^{n-1}}\ \cdots\boxed{ク,ケ,コ,サ}$$

(2)　$a_{n+1}+\alpha\cdot 2^{n+1}=3\left(a_n+\alpha\cdot 2^n\right)$ より

$$a_{n+1}=3a_n+\alpha\cdot 2^n$$

これが①と一致するので

$$\alpha\cdot 2^n=2^{n+2}$$

$$\therefore \alpha=\underline{4}\ \cdots\boxed{シ}$$

$c_{n+1}=3c_n$ と表されるので，$\{c_n\}$ は，

$$c_1=a_1+4\cdot 2^1=\underline{4}\ \cdots\boxed{ス}\ ，\ 公比\underline{3}\ \cdots\boxed{セ}$$

の等比数列であるから

$$c_n=4\cdot 3^{n-1}$$

②より

$$a_n=c_n-4\cdot 2^n=4\cdot 3^{n-1}-4\cdot 2^n=\underline{4}(\underline{3^{n-1}}-\underline{2}\cdot\underline{2^{n-1}})\ \cdots\boxed{ソ,タ,チ,ツ}$$

(1) $f(x)=-\{x^2-2(a+2)x\}-a^2+b$

$=-\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2-a^2+b$

$=-\{x-(a+2)\}^2+4a+b+4$

より，$y=f(x)$のグラフの頂点の座標は　$(a+\underline{2},\ \underline{4}a+b+\underline{4})$ …$\boxed{ア,イ,ウ}$

$1\leqq x\leqq 3$における$f(x)$の最大値が$4a+b+4$となるには

$1\leqq a+2\leqq 3$

$\underline{-1}\leqq a\leqq \underline{1}$ …$\boxed{エオ,カ}$

(2) $f(x)\geqq 0$の解が存在するには，$y=f(x)$の頂点のy座標が0以上となればよいので

$4a+b+4\geqq 0$

$\therefore b\geqq \underline{-4}a-\underline{4}$ …$\boxed{クケ,コ}$　② …$\boxed{キ}$

$f(x)\geqq 0$の解が$1\leqq x\leqq 3$になるには，$y=f(x)$とx軸との交点が(1，0)，(3，0)となればよいので

$y=f(x)$が(1，0)を通るとき

$0=-1^2+2(a+2)\cdot 1-a^2+b$

$\therefore b=a^2-2a-3$ ・・・①

$y=f(x)$が(3，0)を通るとき

$0=-3^2+2(a+2)\cdot 3-a^2+b$

$\therefore b=a^2-6a-3$ ・・・②

①，②より

$a=\underline{0}$ …$\boxed{サ}$ ，$b=\underline{-3}$ …$\boxed{シス}$

$xy=16$ の両辺に，底が 2 の対数をとると

$$\log_2 xy=\log_2 16$$

$$\log_2 x+\log_2 y=\underline{4}\ \cdots\boxed{\text{ア}}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

$X=\log_2 x$，$Y=\log_2 y$ とおくと，底 $2>1$ であるから，$x\geqq 2$，$y\geqq 2$ より

$$\log_2 x>\log_2 2,\quad \log_2 y>\log_2 2$$

$$\therefore X\geqq\underline{1}\ \cdots\boxed{\text{イ}}\ ,\ Y\geqq\underline{1}\ \cdots\boxed{\text{ウ}}\quad\cdot\cdot\cdot②$$

よって，①より

$$X+Y=4$$

$$Y=4-X\quad\cdot\cdot\cdot③$$

であるから，③および $Y\geqq 1$ より

$$4-X\geqq 1$$

$$\therefore X\leqq 3$$

これと $X\geqq 1$ より

$$1\leqq X\leqq\underline{3}\ \cdots\boxed{\text{エ}}\quad\cdot\cdot\cdot④$$

$(\log_2 x)(\log_2 y)$ を X の式で表すと

$$(\log_2 x)(\log_2 y)=XY=X(4-X)\quad(\because③)$$

$$=\underline{-}X^2+\underline{4}X\ \cdots\boxed{\text{オ,カ}}$$

$$=-(X-2)^2+4$$

したがって，③より，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ は

$X=\underline{2}\ \cdots\boxed{\text{キ}}$　のとき，最大値 $\underline{4}\ \cdots\boxed{\text{ク}}$

$X=\underline{1},\ \underline{3}\ \cdots\boxed{\text{ケ,コ}}$　のとき，最小値 $\underline{3}\ \cdots\boxed{\text{サ}}$

をとる

また，$X=\log_2 x$，$Y=\log_2 y$ より $x=2^X$，$y=2^Y$ であるから

$X=2$ のとき，③より $Y=2$ であるから

$$x=2^2=\underline{4}\ \cdots\boxed{\text{シ}}\ ,\ y=2^2=\underline{4}\ \cdots\boxed{\text{ス}}$$

$X=1$ のとき，③より $Y=3$ であるから

$$x=2^1=\underline{2}\ \cdots\boxed{\text{セ}}\ ,\ y=2^3=\underline{8}\ \cdots\boxed{\text{ソ}}$$

$X=3$ のとき，③より $Y=1$ であるから

$$x=2^3=\underline{8}\ \cdots\boxed{\text{タ}}\ ,\ y=2^1=\underline{2}\ \cdots\boxed{\text{チ}}$$

(1)　$36=17\cdot 2+2 \iff 2=36-17\cdot 2$ ・・・②

$17=2\cdot 8+1 \iff 1=17-2\cdot 8$ ・・・③

であるから，②を③に代入すると

$1=17-(36-17\cdot 2)\cdot 8$

$=17-36\cdot 8+17\cdot 16$

$=17\cdot 17-36\cdot 8$

$\therefore 17\cdot 17-36\cdot 8=1$ ・・・④

①－④より

$17(x-17)-36(y-8)=0$

$17(x-17)=36(y-8)$

17 と 36 は互いに素であるから，整数kを用いて

$x-17=36k$，$y-8=17k$

$\therefore x=36k+17$，$y=17k+8$

x，yは自然数であるから，$k \geqq 0$より，xが最小のものは

$x=\underline{17}$ …$\boxed{アイ}$　，$y=\underline{8}$ …$\boxed{ウ}$

さらに，$x \leqq 2017$より

$36k+17 \leqq 2017 \quad \therefore k \leqq \dfrac{500}{9} \quad (=55.5\cdots)$

よって，xが 2017 以下で最大となるのは，$k=55$のときなので

$x=36\cdot 55+17=\underline{1997}$ …$\boxed{エオカキ}$　，$y=17\cdot 55+8=\underline{943}$ …$\boxed{クケコ}$

(2)　x^3は整数であるから，(1)より

$x^3=36k+17$

を満たす

$36k+17$が自然数の 3 乗となるものは

$k=0$のとき，$36k+17=36\cdot 0+17=17$となり，不適

$k=1$のとき，$36k+17=36\cdot 1+17=53$となり，不適

$k=2$のとき，$36k+17=36\cdot 2+17=89$となり，不適

$k=3$のとき，$36k+17=36\cdot 3+17=125=5^3$となり，条件を満たす

よって，求めるxは，$x^3=5^3$より，$x=\underline{5}$ …$\boxed{サ}$

さらに，yの値は，$y=17\cdot 3+8=\underline{59}$ …$\boxed{シス}$

$f'(x)=3x^2-18x+15$ より，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-9t^2+15t-6)$ における曲線 C の接線 ℓ の方程式は

$$y=(3t^2-18t+15)(x-t)+t^3-9t^2+15t-6$$
$$=(3t^2-18t+15)x-2t^3+9t^2-6$$ …ア, イウ, エオ, カ, キ, ク

(1)　$f'(x)=3(x-1)(x-5)$

であるから，増減表は右のようになる

t	……	1	……	5	……
$f'(t)$	＋	0	−	0	＋
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は

$x=1$ …ケのとき極大値

$x=5$ …コのとき極小値

をとる

$x=5$ における C の接線 ℓ の方程式は　$y=f(5)=-31$

したがって，曲線 C と直線 ℓ との共有点の x 座標を求めると

$$x^3-9x^2+15x-6=-31$$
$$(x-5)^2(x+1)=0$$
$$\therefore x=5,\ -1$$ …サシ

ゆえに，求める面積は

$$\int_{-1}^{5}\left\{x^3-9x^2+15x-6-(-31)\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{5}\left(x^3-9x^2+15x+25\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+\frac{15}{2}x^2+25x\right]_{-1}^{5}$$
$$=108$$ …スセソ

$$\frac{|1|}{12}\{5-(-1)\}^4=108$$

3次関数のグラフとその接線で囲まれた部分の面積は

$$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

（a：3次関数の x^3 の係数，α，β：交点の x 座標）

(2)　ℓ が点 $\mathrm{Q}(0,\ q)$ を通るとすると

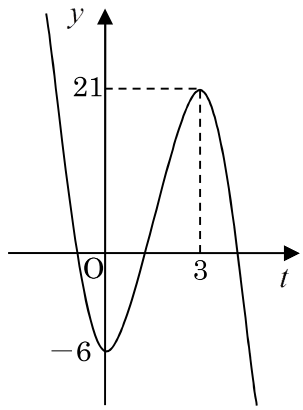
$$q=-2t^3+9t^2-6 \quad \cdots ①$$

$g(t)=-2t^3+9t^2-6$ とおくと

$$g'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$$

であるから，増減表は次のようになる

t	……	0	……	3	……
$g'(t)$	−	0	＋	0	−
$g(t)$	↘	−6	↗	21	↘



これから，$y=g(t)$ のグラフは右のようになる

点Pを通る曲線 C の接線の本数は，t の方程式①の実数解，

つまり $y=g(t)$ と直線 $y=q$ との交点の個数と一致するので，

点Qを通る曲線 C の接線の本数がちょうど2本となるのは

$q=-6$ または 21 …タチ, ツテ

(1)　1 人の手の出し方は 3 通りずつであるから，手の出し方の総数は

$3^5 = \underline{243}$ …$\boxed{\text{アイウ}}$（通り）

(2)　(ⅰ)　5 人から勝者である 3 人の選び方は

$_5C_3 = \underline{10}$ …$\boxed{\text{エオ}}$（通り）

(ⅱ)　勝者の手の出し方は，$\underline{3}$ …$\boxed{\text{カ}}$（通り）

(ⅲ)　(ⅰ)と(ⅱ)より，求める総数は

$10 \times 3 = \underline{30}$ …$\boxed{\text{キク}}$（通り）

(3)　2 人が勝つ確率は　$\dfrac{_5C_2 \times 3}{3^5} = \underline{\dfrac{10}{81}}$ …$\boxed{\text{ケコ, サシ}}$

4 人が勝つ確率は　$\dfrac{_5C_4 \times 3}{3^5} = \underline{\dfrac{5}{81}}$ …$\boxed{\text{ス, セソ}}$

3 人が勝つ確率は，(2)より　$\dfrac{30}{3^5} = \dfrac{10}{81}$

1 人が勝つ確率は　$\dfrac{_5C_1 \times 3}{3^5} = \dfrac{5}{81}$

よって，あいこになる確率は

$$1 - \left(\frac{5}{81} + \frac{10}{81} + \frac{10}{81} + \frac{5}{81}\right) = \underline{\frac{17}{27}} \text{ …}\boxed{\text{タチ, ツテ}}$$

(4)　リーダー(以下 O とする)を含む 3 人を選ぶ選び方は，O 以外の 4 人から 2 人を選べばよく，それぞれの手の出し方は 3 通りずつであるから，O を含む 3 人が勝つ確率は

$$\frac{_4C_2 \times 3}{3^5} = \frac{2}{27}$$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\;\frac{2}{27}\;}{\;\frac{10}{81}\;} = \underline{\dfrac{3}{5}}$ …$\boxed{\text{ト, ナ}}$

(1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{4}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}}{4+1}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{4}{5}\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{\underline{4}}\vec{b}-\dfrac{2}{\underline{3}}\vec{a}\quad\cdots\boxed{ア,イ,ウ,エ}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{\underline{5}}\vec{b}+\dfrac{4}{\underline{5}}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\quad\cdots\boxed{オ,カ,キ,ク}$$

(2)　点 S は平面 α 上にあることから，$\overrightarrow{PS}$ は $\overrightarrow{PS}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$ と表されるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}\\&=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+s\left(\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)+t\left(\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{4}{5}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{2}{\underline{3}}(1-s-t)\vec{a}+\left(\frac{3}{\underline{4}}s+\frac{1}{\underline{5}}t\right)\vec{b}+\frac{4}{\underline{5}}t\vec{c}\quad\cdots\boxed{ケ,コ,サ,シ,ス,セ,ソ,タ}\end{aligned}$$

さらに，点 S は直線 AC 上にあることから

$$\overrightarrow{OS}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}\quad(\because\ \alpha+\beta=1)$$

と表されるので

$$\frac{3}{4}s+\frac{1}{5}t=\underline{0}\quad\cdots\boxed{チ}\ ,\quad\frac{2(1-s-t)}{3}+\frac{4t}{5}=\underline{1}\quad\cdots\boxed{ツ}$$

これを解いて

$$s=-\frac{2}{7},\quad t=\frac{15}{14}$$

であるから

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{c}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+6\cdot\overrightarrow{OC}}{6+1}$$

より，点 S は線分 AC を $\underline{6}:\underline{1}$　$\cdots\boxed{テ,ト}$ に内分する点である