解答・解説

【第１問】

(1)　３つの数字 X，Y，Z の決まり方は全部で $6^3=216$ 通り。
そのうち $X<Y$ となるのは ${}_6C_2\times 6=90$ 通りであるので，
求める確率は

$$\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$$

(2)　$X<Y$ となる確率は，(1)より $\frac{5}{12}$

$X<Y$ かつ $X<Z$ となる確率は

$$\frac{5^2+4^2+3^2+2^2+1^2}{6^3}=\frac{55}{216}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{55}{216}\div\frac{5}{12}=\frac{11}{18}$$

【第２問】

(1)　$71=32\times2+7$

$32=7\times4+4$

$7=4\times1+3$

$4=3\times1+1$

よって，最大公約数は 1

(2)　(1)より

$71=32\times2+7$ より，$7=71-32\times2$

$32=7\times4+4$ より，$4=32-7\times4=32-(71-32\times2)\times4$

$$=71\times(-4)+32\times9$$

$7=4\times1+3$ より，$3=7-4=(71-32\times2)-\{71\times(-4)+32\times9\}$

$$=71\times5-32\times11$$

よって，$71\times5+32\times(-11)=3$ であり，方程式 $71x+32y=3$ は

$x=5$，$y=-11$ を解にもつので，

$$71(x-5)+32(y+11)=0$$

$$71(x-5)=32(-y-11)$$

71 と 32 は互いに素であるので，k を整数として

$$x-5=32k,\quad -y-11=71k$$

と表される。よって，

$$(x,y)=(32k+5,-71k-11)$$

【第３問】

(1)　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$ より，$\frac{\pi}{3}\leqq2\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$ であるから

$-1\leqq\cos2\theta\leqq\frac{1}{2}$　よって　$-1\leqq t\leqq\frac{1}{2}$

(2)　$\cos4\theta=\cos2\cdot2\theta=2\cos^2 2\theta-1$ であるから，y を t を用いて表すと

$$y=2t^2-3t-1\quad\left(-1\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$$

となる。

$$y=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$$

であるから，$-1\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ において

$t=-1$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，最大値 4

【第４問】

$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，
相加平均と相乗平均の関係より

$$2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2\qquad\text{よって}\quad t\geqq2$$

等号成立は，$2^x=2^{-x}$　すなわち　$x=0$ のときである。
また，

$$t^2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+2+4^{-x}$$

であるから，y を t を用いて表すと

$$y=t^2+at-2$$

$$=\left(t+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2$$

$a>0$ であるから，$t\geqq2$ において

$t=2$　すなわち　$x=0$ のとき　最小値 $2a+2$

【第５問】

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy$ であるから，xy の最大値を求めればよい。

$x>0$，$2y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$x+2y \geqq 2\sqrt{x\cdot 2y}$$

$x+2y=8$ なので，$8\geqq 2\sqrt{x\cdot 2y}$　両辺正より　$xy\leqq 8$

等号成立は $x=2y$ のときで，このとき $x=4$，$y=2$ となる。

よって，求める最大値は $\log_{10}8=3\log_{10}2$

【第６問】

【1】公差を d とすると，$a_1=38$，$a_5=26$ より

$$38+4d=26 \quad \text{よって} \quad d=-3$$

$a_n=-3n+41$ であるから，$a_n\geqq 0$ とすると　$n\leqq \frac{41}{3}=13.6\cdots$

したがって，$n=13$ のとき，S_n は最大となる。

【2】$r\neq 1$ であるから，$S_n=\dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$

条件より

$$\frac{a\left(r^3-1\right)}{r-1}=28 \quad \cdots①$$

$$\frac{a\left(r^9-1\right)}{r-1}=2044 \quad \cdots②$$

②÷①より

$$\frac{r^9-1}{r^3-1}=73$$

$$r^6+r^3+1=73$$

$$\left(r^3+9\right)\left(r^3-8\right)=0$$

r は実数でかつ $r>0$ であるから　$r=2$

このとき，①より　$a=4$

したがって，$a_n=2^{n+1}$

【第７問】

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3a_n+2^n}{2\cdot 2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

よって

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

(2)　$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$ を変形すると

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}\left(b_n+1\right)$$

数列 $\left\{b_n+1\right\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{a_1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

よって，$a_n=2^n b_n=3^n-2^n$

【第８問】

(1)　3 点 B，P，E は一直線上にあるので，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BE}$$

と表せる。よって

$$\overrightarrow{AP}=\left(1-s\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{AC} \quad \cdots①$$

同様に，3 点 C，P，D は一直線上にあるので，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{CP}=t\overrightarrow{CD}$$

と表せる。よって

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}t\overrightarrow{AB}+\left(1-t\right)\overrightarrow{AC} \quad \cdots②$$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$ であるから，①，②より

$$s=\frac{3}{4},\quad t=\frac{5}{8}$$

したがって

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$

(2)　(1)より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$$

よって，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$ であるから，点 Q は線分 BC を $3:2$ に内分するであるので，BQ : QC$=3:2$